$(E, \leq)$ διατεταγμένο

$(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο $\overset{ορ}{\iff}$
κάθε μη κενό υποσύνολο του E έχει ελάχιστο στοιχείο

$(π.χ.\ \mathbb{N})$

<u>Προτ</u>

Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο είναι και ολικά (γραμμικά) διατεταγμένο
$(\leq)$

<u>Απόδ</u>

Έστω $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο και x, y τυχαία στοιχεία του E

$$\min\{x, y\} = x \quad ή \quad \min\{x, y\} = y$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x \leq y \quad ή \quad y \leq x$$

Άρα $(E, \leq)$ γραμμικά διατεταγμένο

Θεώρημα

(Αρχή υπερπεπερασμένης επαγωγής)

Έστω $(E, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο, με $\min E = a$ κ' έστω $P(\cdot)$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το E.

Υποθέτουμε ότι:

$P(a)$ αληθής κ $P(x)$ αληθής $\forall\, x < y \Rightarrow P(y)$ αληθής για όλα τα $y \in E$ τότε $P(x)$ αληθής για όλα τα $x \in E$

Απόδ

Έστω A είναι το σύνολο αλήθειας του $P(\cdot)$. Τότε $A \subseteq E$

$P(a)$ αληθής $\Rightarrow a \in A \neq \emptyset$

Υποθέτουμε ότι $A \subset E$ Τότε $A^c \neq \emptyset$

Επειδή E καλά διατεταγμένο ~~σύνολο~~, το A^c έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $\min A^c = B$

Τότε ισχύει από τα εξής:

- για όλα τα x, με $x < B$ ισχύει $P(x)$
- ή $\exists\, x < B$ τέτοιο, ώστε $\sim P(x)$

Υποθ

$P(B)$ αληθής $\Rightarrow B \in A$ άτοπο

$x \notin A^c \wedge x \notin A \Rightarrow x \in A\ x \notin A$ άτοπο

Άρα $A \subseteq E$

$\sigma : A \to$, σχέση $\Leftrightarrow \sigma \subseteq A \times B$

Μια σχέση $f: A \to B$ $(f \subseteq A \times B)$ θα λέγεται συνάρτηση αν ισχύουν τα εξής

$$\mathcal{D}(f) = A$$

$x f y \wedge x f z \Rightarrow y = z$ για όλα τα $x \in A$, $y, z \in B$

$$\mathcal{R}(f) = \{ y \in B \ (\exists x \in A) \ x f y \} \subseteq B$$

$\mathcal{R}(f) = B$ τότε η f λέγεται επί του B

$$f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$$

$$G_f = \{ (x,y) \in A \times B : x f y \}$$

f συνάρτηση κ' $x f y \Leftrightarrow y = f(x)$

Ορισμός

Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση

f αμφιμονοσήμαντη (f είναι 1-1) $\overset{\text{ορισμ}}{\Leftrightarrow}$

$(\forall x, y$ ισχύει$)$: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

$(\Rightarrow \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

$F = \{(\alpha,\mu),(\beta,\mu),(\gamma,\kappa),(\delta,\mu)\}$

$F^{-1} = \{(\mu,\alpha),(\mu,\beta),(\kappa,\gamma),(\mu,\delta)\}$

$F^{-1} \quad B \to A$

Πρόταση

Η αντίστροφη σχέση F^{-1} μιας συνάρτησης F είναι και αυτή συνάρτηση αν και μόνο αν η F είναι αμφιμονοσήμαντη και επί

Αποδ

Έστω ότι η $F: A \xrightarrow{\text{επί}} B$ αμφιμονοσήμαντη

Ο.δ.ο η $F^{-1}: B \to A$ είναι συνάρτηση

$R(F) = B$ (επειδή F επί) $\xRightarrow{R(F) = D(F^{-1})}$

$\Rightarrow D(F^{-1}) = B$

$x F^{-1} y \wedge x F^{-1} z \Rightarrow y F x \wedge z F x$

$\xRightarrow{F \text{ συναρτ}} x = F(y) \wedge x = F(z) \Rightarrow F(y) = F(z)$

Πρόταση

Η αντίστροφη σχέση F^{-1} μιας συνάρτησης F είναι και αυτή συνάρτηση αν και

και μόνο αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

<u>Απόδ</u>

Έστω $f^{-1}: B \to A$ είναι συνάρτηση.

Ο.δ.ο η f αμφιμονοσήμαντη και επί

$f^{-1}: B \to A$ συνάρτηση $\Rightarrow \mathcal{D}(f^{-1}) = B$

$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{R}(f) = B$

Άρα f είναι επί

Υποθέτω ότι $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$. Θέτω $f(x) = f(y) = z$

Άρα $x f z \wedge y f z \Rightarrow$

$\Rightarrow z f^{-1} x \wedge z f^{-1} y \overset{f^{-1} \text{ συν}}{\Rightarrow} x = y$

<u>Πρότ</u>

Αν $f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί

<u>Πρότ</u>

Αν $f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί

$\mathcal{D}(f) = A$

$R(f^{-1}) = D(f) = A$

Άρα f^{-1} είναι επί

<u>Αποδ</u>

Έστω $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$ για κάποια $x, y \in B$. Θέλουμε

$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = z$

$\Rightarrow x f^{-1} z \wedge y f^{-1} z \Rightarrow$

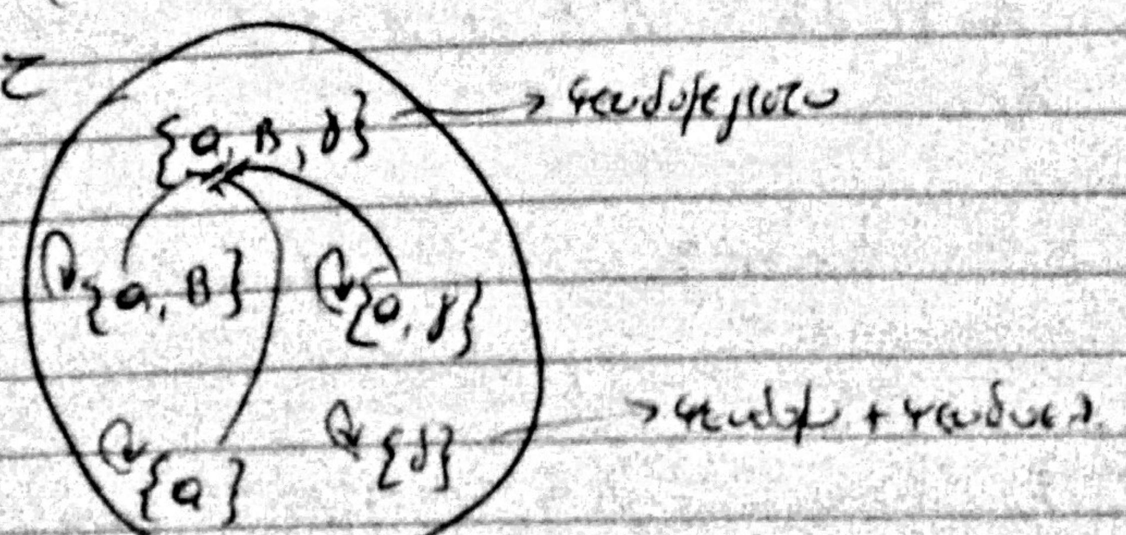
$\Rightarrow z f x \wedge z f y \overset{\text{επί}}{\Rightarrow} x = f(z) \wedge y = f(z)$

$\Rightarrow x = y$

Π. $\tau = \{\{a\}, \{a, \beta\}, \{a, \gamma\}, \{a, \beta, \gamma\}, \{\delta\}\}$

(μη γραμμ.)

$(\tau, \subseteq)$ διατεταγμένο σύνολο



σ διμελής σχέση στο Ε.
Ν.δ.ο
σ διάταξη $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1} \wedge \sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$

→ σ ανακλ. $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \sigma$
→ σ συμμετρ. $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$
→ σ αντισυμμ. $\Leftrightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$
→ σ μεταβ. $\Leftrightarrow \sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$

σ διμελής σχέση στο Ε Ν.δ.ο

σ διάταξη $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1} \wedge \sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$

$\preceq$ διατ $\Rightarrow \preceq^{-1}$ διατ $\succeq$

$(\Longrightarrow)$ Έστω σ διάταξη
τότε και η σ^{-1} διάταξη
Άρα σ, σ^{-1} ανακλαστική
Δηλαδή $\Delta \subseteq \sigma \wedge \Delta \subseteq \sigma^{-1}$
Άρα $\Delta \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1}$

σ ως διάταξη, είναι μεταβατική
Άρα $\sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$

$(\Longleftarrow)$ Έστω $\Delta \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1}$ και
$\sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$ Θ.δ.ο σ διάταξη

Αφού $\underline{\Delta = \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \sigma} \rightarrow \Delta \subseteq \sigma$

Άρα σ ανακλαστική

Επειδή ισχύει $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma$ μεταβατική

Αφού $\Delta = \sigma \cap \sigma^{-1} \Rightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

$\Rightarrow \sigma$ αντισυμμετρική

$(\Longrightarrow)$

Έστω σ διάταξη

σ (ως διάταξη) είναι μεταβ.

Άρα $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$